Zadania na XIX Podkarpacki Konkurs Matematyczny im. Franciszka Leji

Poziom II

(klasy drugie liceum i trzecie technikum)

Finał

27 kwietnia 2019 r. godzina 10.00

(150 minut)

1. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=\frac{7}{2} \\ x^3+y^3+z^3=\frac{9}{2} \end{cases}.$$

2. Niech x, y, z będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi, spełniającymi warunek $x^2+y^2+z^2=1$.
   Wykaż, że $\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

3. Wykaż, że jeśli dla wszystkich $x\in\langle -1,1\rangle$ zachodzi nierówność $|ax^2+bx+c|\leq 1$, to zachodzi nierówność $|cx^2+bx+a|\leq 2$, gdzie $a,b,c\in\mathbb{R}$.

4. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC obrano odpowiednio punkty D, E, F w taki sposób, że
   $$|AD|:|DB|=|BE|:|EC|=|CF|:|FA|=1:2.$$
   Punkty przecięcia prostych AE, BF i CD między sobą wyznaczają trójkąt. Oblicz stosunek pola tego trójkąta do pola trójkąta ABC.

5. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n, liczba $\frac{1}{30}n^5+\frac{1}{6}n^3+\frac{4}{5}n$ jest całkowita.

Powodzenia!